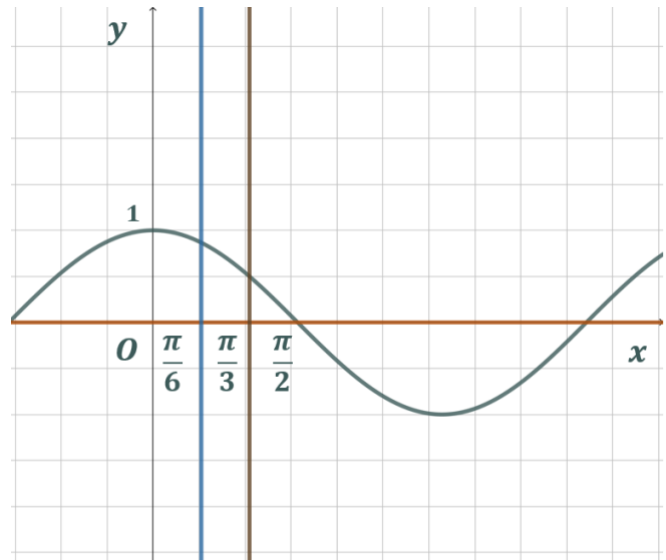


Варіант 1

1. (2 б) Побудуйте фігуру, обмежену лініями: $y = \cos x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$.



2. (2 б) Обчисліть визначений інтеграл:

А) $\int_{-3}^2 x^2 dx$

Б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \sin 3x dx$

Розв'язок:

А) $\int_{-3}^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-3}^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{(-3)^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{-27}{3} = \frac{8}{3} + \frac{27}{3} = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}$

Б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} = -\frac{1}{3} \cos 3\pi + \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3}$

3. (2 б) Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями:

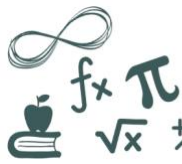
А) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$, $x = 5$

Б) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$

Розв'язок:

А) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$, $x = 5$

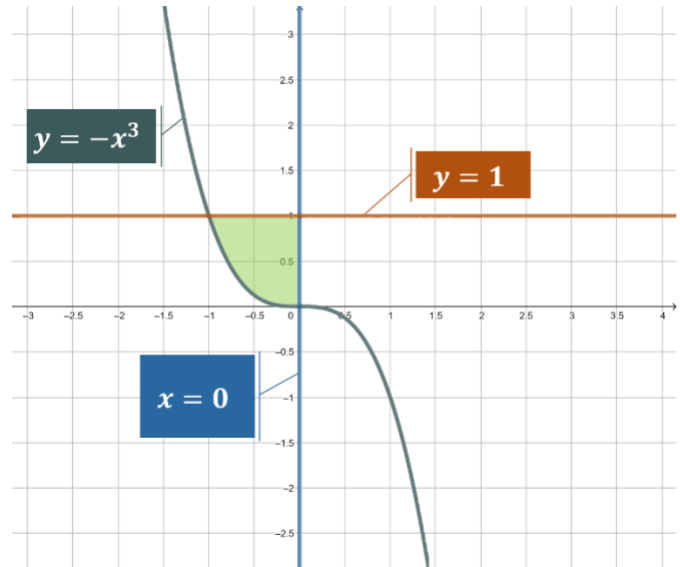
$$S = \int_3^5 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_3^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{3^3}{3} = \frac{125 - 27}{3} = \frac{98}{3} = 32\frac{2}{3}$$



Б) $y = \sin x, y = 0, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{2}$

$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{6} = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4. (2 б) Виконавши побудову, обчисліть площу фігури, обмеженої лініями: $y = -x^3, x = 0, y = 1$



Розв'язок:

**Площу шуканої фігури можна знайти декількома способами*

1 спосіб:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 1 \, dx - \int_{-1}^0 -x^3 \, dx = \int_{-1}^0 (1 + x^3) \, dx = x + \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^0 \\ &= 0 - \left(-1 + \frac{(-1)^4}{4} \right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$

2 спосіб:

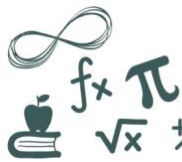
$$S = S_{\text{КВ}} - S_{\text{КТ}}$$

$$S_{\text{КВ}} = 1^2 = 1 \text{ (кв. од.)}$$

$$S_{\text{КТ}} = \int_{-1}^0 -x^3 \, dx = -\frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^0 = 0 + \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4} \text{ (кв. од.)}$$

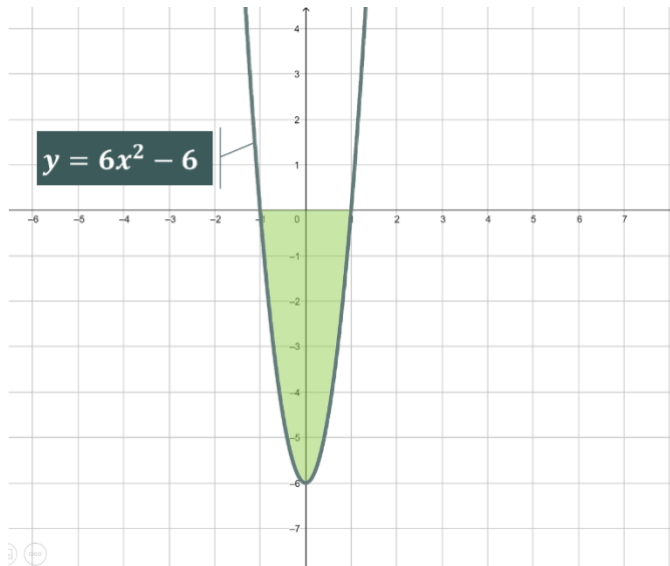
$$S = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ (кв.од.)}$$

Відповідь: $\frac{3}{4}$ (кв.од.)



5. (2 б) Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 6x^2 - 6$ та віссю абсцис

Розв'язок:



*Площа шуканої фігури знаходиться під віссю абсцис, тому застосуємо наступну формулу:

$$S = - \int_a^b f(x) dx$$

Знайдемо точки перетину графіку функції $y = 6x^2 - 6$ з віссю Ox :

$$6x^2 - 6 = 0$$

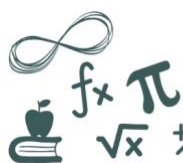
$$6(x^2 - 1) = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$

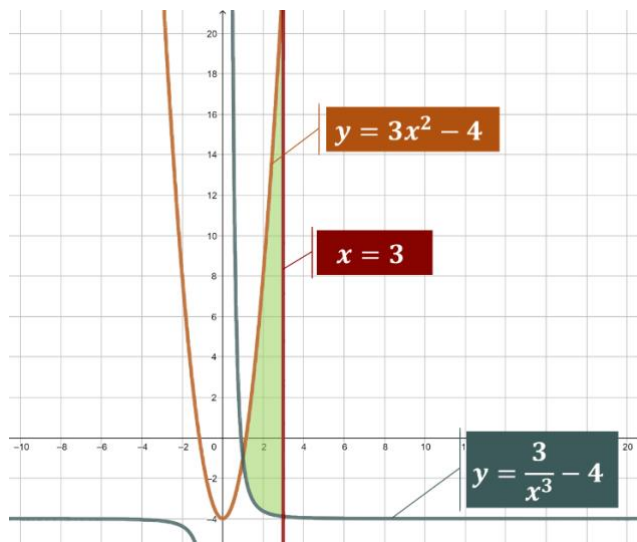
$$\begin{aligned} S &= - \int_{-1}^1 (6x^2 - 6) dx = - \left(\frac{6x^3}{3} - 6x \right) \Big|_{-1}^1 = - (2x^3 - 6x) \Big|_{-1}^1 \\ &= - \left(((2 \cdot 1^3) - 6 \cdot 1) - ((2 \cdot (-1)^3) - 6 \cdot (-1)) \right) = -(-4 - 4) \\ &= 8 \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$

Відповідь: 8 (кв. од.)

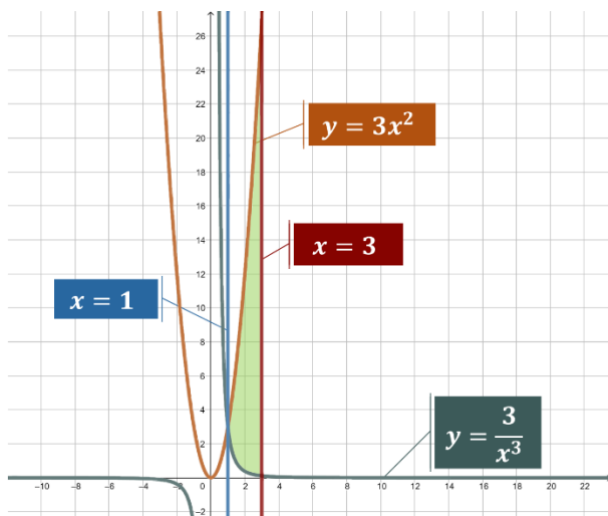


6. (2 б) Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = \frac{3}{x^3} - 4$, $y = 3x^2 - 4$ та прямою $x = 3$

**Площа шуканої фігури знаходиться одночасно над віссю Ox та під нею, тому перенесемо площу шуканої фігури на необхідну нам кількість одиниць паралельно осі ординат.*



За умовою очевидно, що графіки функцій опущені вниз на 4 одиниці, тому піднінемо нашу шукану площу фігури на 4 одиниці паралельно осі ординат.



**Перенесена нами на 4 одиниці паралельно осі ординат площа шуканої фігури буде обмежена лініями $y = \frac{3}{x^3}$, $y = 3x^2$ та прямою $x = 3$*

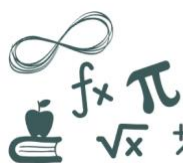
- Знайдемо точку перетину графіків функцій $y = \frac{3}{x^3}$, $y = 3x^2$:

$$\frac{3}{x^3} = 3x^2$$

$$3 = 3x^5$$

$$x^5 = 1$$

$$x = 1 \left(\begin{array}{c} \text{Нижня} \\ \text{межа інтегрування} \end{array} \right)$$



Математика НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ, 11 КЛАС

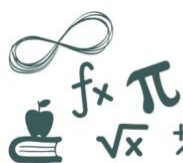
Самостійна робота

ІНТЕГРАЛ. ПЛОЩА КРИВОЛІНІЙНОЇ ТРАПЕЦІЇ. ПЛОЩІ ФІГУР.



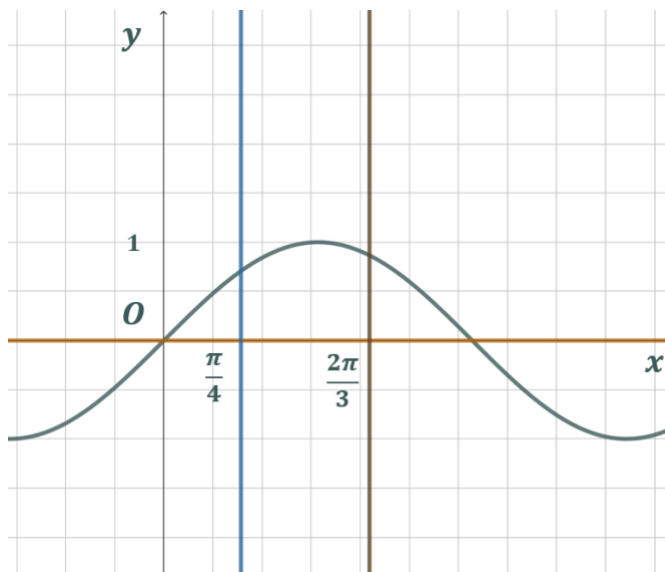
$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 (3x^2) dx - \int_1^3 \left(\frac{3}{x^3} \right) dx = \int_1^3 \left(3x^2 - \frac{3}{x^3} \right) dx = \left(\frac{3x^3}{3} - \left(3 \cdot \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \right) \right) \Big|_1^3 \\ &= x^3 + \frac{3}{2x^2} \Big|_1^3 = 3^3 + \frac{3}{2 \cdot 3^2} - 1^3 - \frac{3}{2 \cdot 1^2} = 27 + \frac{3}{18} - 1 - \frac{3}{2} \\ &= 26 + \frac{1}{6} - \frac{3}{2} = 26 + \frac{1-9}{6} = 26 - \frac{8}{6} = 26 - \frac{4}{3} = 25\frac{3}{3} - 1\frac{1}{3} \\ &= 24\frac{2}{3} \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$

Відповідь: $24\frac{2}{3}$ (кв. од.)



Варіант 2

1. (2 б) Побудуйте фігуру, обмежену лініями: $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{2\pi}{3}$



2. (2 б) Обчисліть визначений інтеграл:

А) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3}$

Б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx$

Розв'язок:

А) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} \Big|_1^2 = -\frac{2}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{2 \cdot 1^2} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{-1 + 4}{8} = \frac{3}{8}$

Б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3}$
 $= \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$

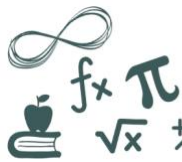
3. (2 б) Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями:

А) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$

Б) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{2}$

Розв'язок:

А) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$

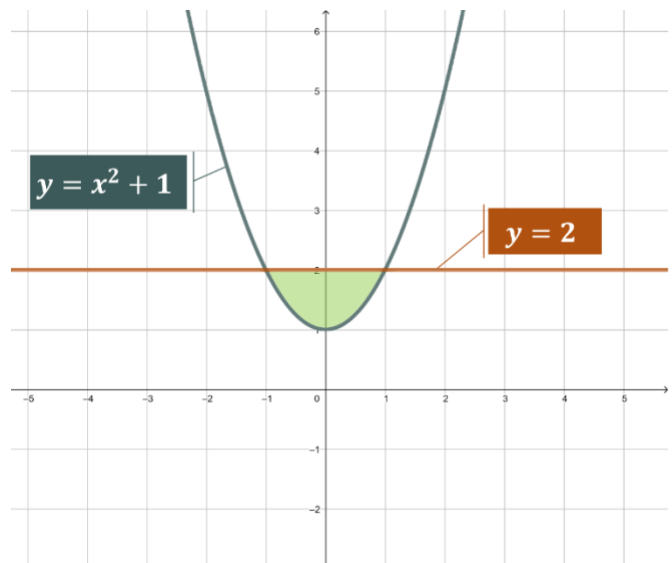


$$S = \int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

Б) $y = \cos x, y = 0, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{\pi}{2}$

$$S = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

4. (2 б) Виконавши побудову, обчисліть площу фігури, обмеженої лініями: $y = x^2 + 1, y = 2$



Розв'язок:

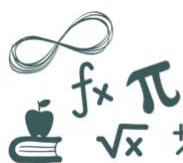
**Площу шуканої фігури можна знайти декількома способами*

1 спосіб:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 2 dx - \int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx = \int_{-1}^1 (2 - x^2 - 1) dx = 2x - \frac{x^3}{3} - x \Big|_{-1}^1 \\ &= 2x - \frac{x^3}{3} - x \Big|_{-1}^1 \\ &= \left(2 \cdot 1 - \frac{1^3}{3} - 1 \right) - \left(2 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3} - (-1) \right) \\ &= 2 - \frac{1}{3} - 1 + 2 - \frac{1}{3} - 1 = 2 - \frac{2}{3} = 1 \frac{1}{3} \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$

2 спосіб:

$$\begin{aligned} S &= S_{\text{КВ}} - S_{\text{КТ}} \\ S_{\text{КВ}} &= 2^2 = 4 \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$



Математика НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ, 11 КЛАС

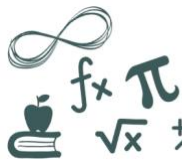
Самостійна робота

ІНТЕГРАЛ. ПЛОЩА КРИВОЛІНІЙНОЇ ТРАПЕЦІЇ. ПЛОЩІ ФІГУР.

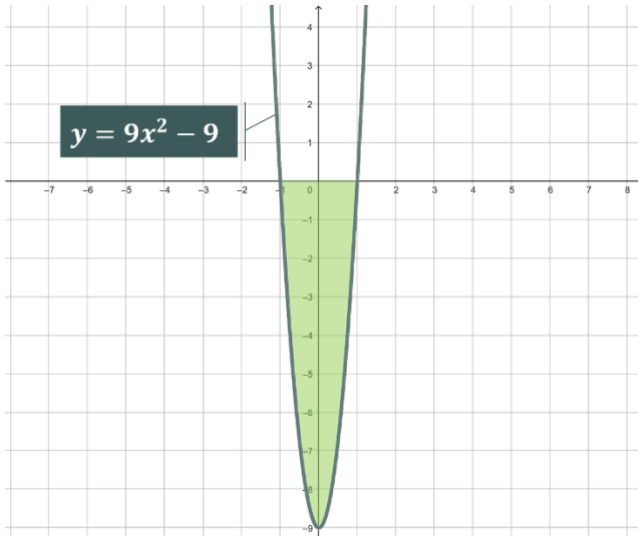


$$\begin{aligned} S_{\text{КТ}} &= \int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^1 = \left(\frac{1^3}{3} + 1 \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} + 1 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{6+2}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \text{ (кв. од.)} \\ S &= 4 - 2\frac{2}{3} = \frac{12-8}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$

Відповідь: $1\frac{1}{3}$ (кв. од.)



5. (2 б) Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 9x^2 - 9$ та віссю абсцис



*Площа шуканої фігури знаходиться під віссю абсцис, тому застосуємо наступну формулу:

$$S = - \int_a^b f(x) dx$$

Знайдемо точки перетину графіку функції $y = 9x^2 - 9$ з віссю Ox :

$$9x^2 - 9 = 0$$

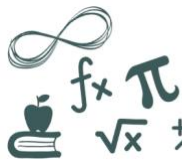
$$9(x^2 - 1) = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$

$$\begin{aligned} S &= - \int_{-1}^1 (9x^2 - 9) dx = \left. \frac{9x^3}{3} - 9x \right|_{-1}^1 = -(3x^3 - 9x) \Big|_{-1}^1 \\ &= -((3 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1) - (3 \cdot (-1)^3 - 9 \cdot (-1))) = -(-6 + 3 - 9) \\ &= 12 \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$

Відповідь: 12 (кв. од.)



Математика НОВА

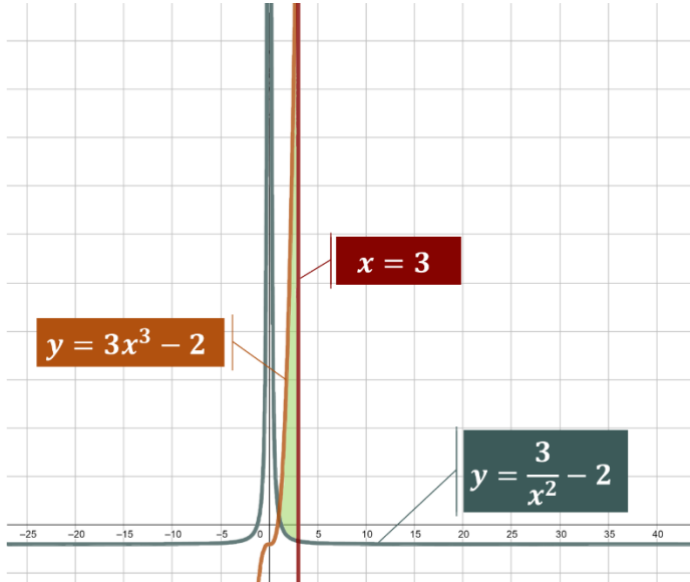
АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ, 11 КЛАС

Інтеграл. Площа криволінійної трапеції. Площі фігур.

Самостійна робота



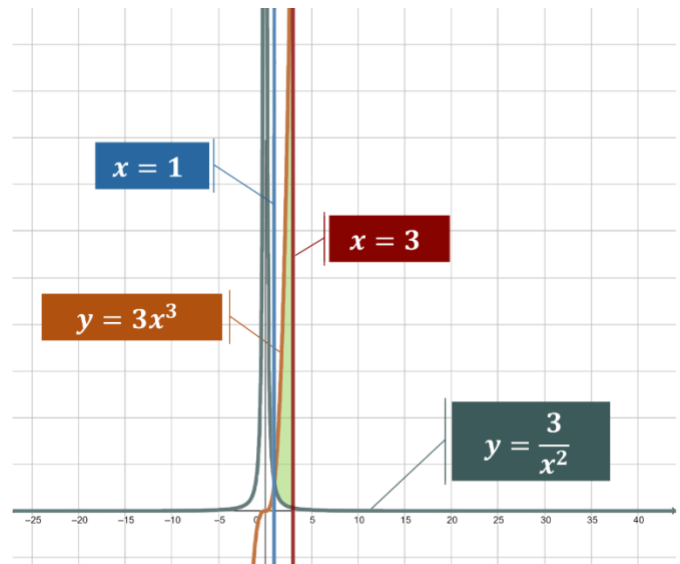
6. (2 б) Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = \frac{3}{x^2} - 2$, $y = 3x^3 - 2$ та прямою $x = 3$



*Площа шуканої фігури знаходиться одночасно над віссю Ox та під нею, тому перенесемо площу шуканої фігури на необхідну нам кількість одиниць паралельно осі ординат.

За умовою очевидно, що графіки функцій опущені вниз на 2 одиниці, тому піднінемо нашу шукану площу фігури на 2 одиниці паралельно осі ординат.

*Перенесена нами на 2 одиниці паралельно осі ординат площа шуканої фігури буде обмежена лініями $y = \frac{3}{x^2}$, $y = 3x^3$ та прямою $x = 3$



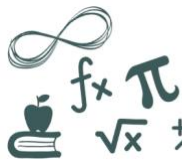
- Знайдемо точку перетину графіків функцій $y = \frac{3}{x^2}$ та $y = 3x^3$:

$$\frac{3}{x^2} = 3x^3$$

$$3x^5 = 3$$

$$x^5 = 1$$

$$x = 1 \text{ (Нижня межа інтегрування)}$$



Математика НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ, 11 КЛАС

Самостійна робота



$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 (3x^3) dx - \int_1^3 \left(\frac{3}{x^2}\right) dx = \int_1^3 \left(3x^3 - \frac{3}{x^2}\right) dx = \frac{3x^4}{4} + \frac{3}{x} \Big|_1^3 \\ &= \left(\frac{3 \cdot 3^4}{4} + \frac{3}{3}\right) - \left(\frac{3 \cdot 1^4}{4} + \frac{3}{1}\right) = \frac{243}{4} + 1 - \frac{3}{4} - 3 = \frac{240}{4} - 2 \\ &= 60 - 2 = 58 \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$

Відповідь: 58 (кв. од.)